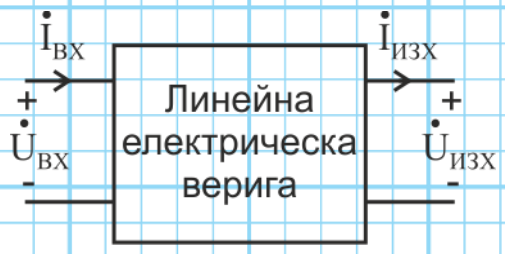
Честотни зависимости в електрическите вериги

Честотни зависимости и предавателни функции

Вече знаем, че съпротивленията на бобините и кондензаторите зависят от честотата на синусоидалния сигнал. Това означава, че една и съща електрическа верига може да има различно поведение, в зависимост от честота на токовете и напреженията. Честотните зависимости на една електрическа верига представляват възможните промени в нейното поведение в зависимост от честотата на токовете и напреженията.

Предавателни функции

За оценка на честотните зависимости на една електрическа верига обикновено се ползват така наречените предавателни функции. Ако разгледаме една линейна електрическа верига, която е четириполюсник (характеризира се с входни и изходни напрежение и ток), могат да се дефинират две основни предавателни функции:



Предаване по напрежение: $k_U(j\omega) = \dfrac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}}$

$$\text{Предаване по ток: } k_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{I}_{\text{ВХ}}}$$

Най-често се използва предавателната функция по напрежение k_U. Смисълът и е, че тя показва какво би било изходното напрежение $\dot{U}_{\text{ИЗХ}}$, при подаване на определено $\dot{U}_{\text{ВХ}}$ към входа на веригата:

$$\dot{U}_{\text{ИЗХ}} = k_U(j\omega).\dot{U}_{\text{ВХ}}$$

В много от случаите ни интересува единствено отношението на амплитудите $U_{\text{ИЗХ}}$ и $U_{\text{ВХ}}$, т.е. модула на $k_U(j\omega)$:

$$|k_U(j\omega)| = \left|\frac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}}\right| = \frac{U_{\text{ИЗХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$$

Предавателната функция може да показва затихване (при $|k_U(j\omega)| \leq 1$) или усилване (при $|k_U(j\omega)| > 1$) на дадена електрическа верига.

<u>Логаритмични честотни зависимости</u>

Предавателната функция показва затихването/усилването в пъти. Но в практиката когато става дума за затихване или усилване, най-често се използва логаритмична скала, т.е. измерване в Бели $[B]$. Затихването в бели се изразява чрез:

$$\alpha = 2\log_{10}\frac{U_{\text{ИЗХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \log_{10}\frac{P_{\text{ИЗХ}}}{P_{\text{ВХ}}}\ [B]$$

където $P_{\text{ИЗХ}}$ и $P_{\text{ВХ}}$ са изходната и входната мощност на веригата. Горното равенство е вярно тъй като $P \propto U^2$.

Бел е голяма единица, поради което по-често се използва децибел $[dB]$:

$$\alpha = 20\log_{10}\frac{U_{\text{ИЗХ}}}{U_{\text{ВХ}}}\ [dB]$$

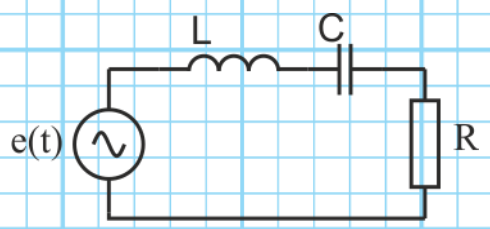
Единицата децибел е въведена в миналото когато са създавани аналоговите аудио системи, тъй като човешкото ухо „чува“ логаритмично. С други когато чуваме даден звук двойно по-силно, той всъщност консумира 10 пъти повече мощност. В следващата таблица са показани връзки между затихване в децибели, в пъти по мощност и в пъти по напрежение.

dB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{P_{\text{ИЗХ}}}{P_{\text{ВХ}}}$	1	1,26	1,58	2	2,51	3,16	3,98	5,01	6,31	7,94	10
$\frac{U_{\text{ИЗХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$	1	1,12	1,26	1,41	1,58	1,78	2	2,24	2,51	2,82	3,16

Резонансни явления

Резонанс на напреженията

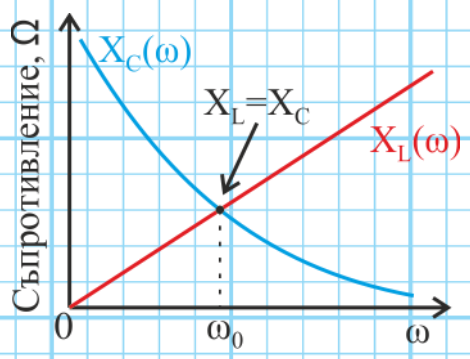
Нека да разгледаме една последователна RLC верига, захранвана от синусоидален източник на напрежение $e(t)$:



Еквивалентното комплексно съпротивление на веригата е:

$$Z = R + j(X_L - X_C)$$

Тъй като $X_L = \omega L$ и $X_C = \frac{1}{\omega C}$, с увеличаване на честотата ω, $X_L(\omega)$ се увеличава, а $X_C(\omega)$ – намалява. Честотните зависимости на двете реактивни съпротивления могат да се представят графично:



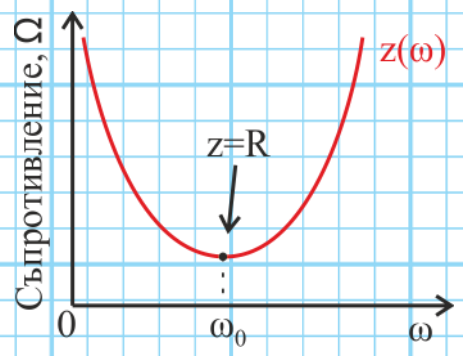
Вижда се, че двете криви $X_L(\omega)$ и $X_C(\omega)$ се пресичат при определена честота ω_0. Тази честота се нарича резонансна, а явлението при което $X_L = X_C$ се нарича резонанс на напреженията. При $\omega = \omega_0$ е изпълнено:

$$Z(\omega_0) = R + j(X_L - X_C) = R + j.0 = R$$

Пълното съпротивление (импеданса) на веригата е:

$$z(\omega) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Вижда се, че при резонанс $z(\omega_0) = R$, т.е. z е възможно най-малко. Честотната зависимост $z(\omega)$ е представена отдолу:



Условието за резонанс на напреженията е:

$$X_L = X_C \quad \rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

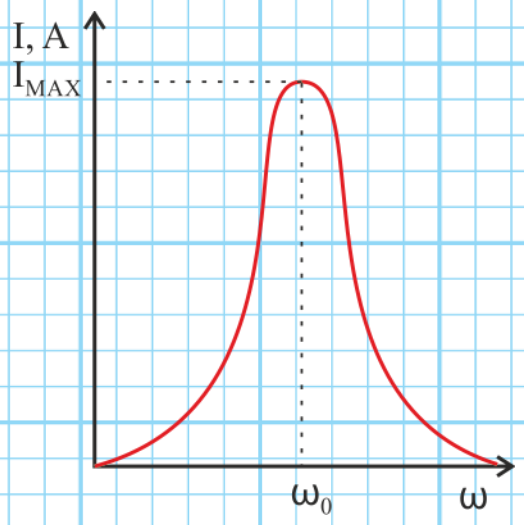
От него можем да изразим т.н. **резонансна честота**:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{или} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Ако E е ефективната стойност на източника, ефективната стойност на тока във веригата е:

$$I(\omega) = \frac{E}{z(\omega)} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Лесно се вижда, че токът ще има максимум когато $z(\omega)$ е минимално, т.е. по време на резонанс:



Критични честоти при половин мощност

Мощността, която се консумира от резистора R, е:

$$P = I^2.R = \left(\frac{E}{z}\right)^2.R$$

R ще консумира максимална мощност при максимален ток, т.е. по време на резонанс:

$$P_{MAX} = I_{MAX}^2 . R = \left(\frac{E}{R}\right)^2 . R = \frac{E^2}{R}$$

Можем лесно да определим, че резисторът ще консумира половината от максималната мощност, когато токът е $\sqrt{2}$ пъти по-малък от максималния:

$$P_{0,5} = \frac{I_{MAX}^2 . R}{2} = \left(\frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}}\right)^2 . R = (0,7 . I_{MAX})^2 . R$$

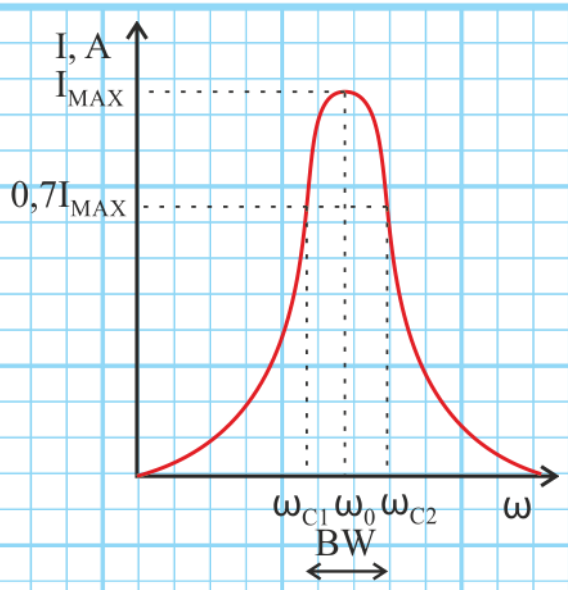
При половин консумирана мощност можем да запишем следното равенство:

$$\frac{P_{MAX}}{2} = \frac{E^2}{2R} = \frac{E^2}{z^2} . R \quad \rightarrow \quad \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2} R$$

Решаваме горното уравнение спрямо ω, и получаваме:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{C1} &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega_{C2} &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \end{aligned}}$$

ω_{C1} и ω_{C2} се наричат критични честоти, при които резисторът консумира половината от максималната мощност.
Графичната интерпретация на получените зависимости е:



Може да се докаже, че резонансната и критичните честоти са свързани по следния начин:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{C1}.\omega_{C2}}$$

За домашно: А вие можете ли да го докажете?

Критичните честоти ни позволяват да дефинираме и понятието **широчина на честотната лента** в rad/s или в Hz:

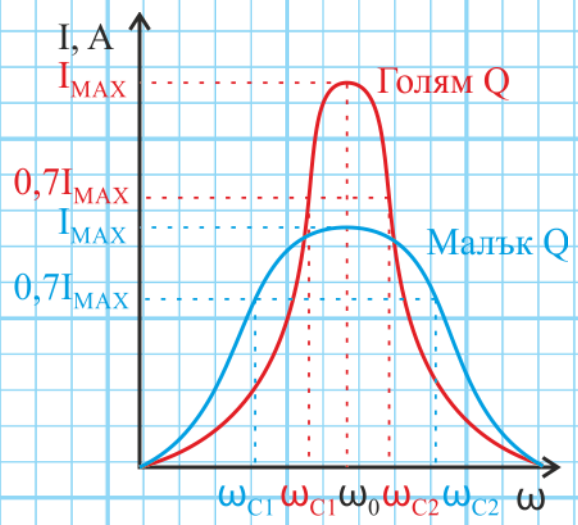
$$BW = \omega_{C2} - \omega_{C1}\ [rad/s] \quad \text{или} \quad BW = f_{C2} - f_{C1}\ [Hz]$$

Качествен фактор на RLC верига

Понятието качественият фактор се дефинира като отношението на резонансната честота и широчината на честотната лента:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\omega_0}{\omega_{C2} - \omega_{C1}}$$

Вижда се, че Q факторът е голям, когато честотната лента BW е малка, т.е. голям качествен фактор означава по-тясна честотна лента. Горното твърдение е представено графично:



В случай на последователна RLC верига Q-факторът е:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}{\dfrac{R}{2L} + \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 + \dfrac{1}{LC}} - \left[-\dfrac{R}{2L} + \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 + \dfrac{1}{LC}}\right]} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}{\dfrac{R}{L}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{LC}}.L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{X_L(\omega_0) \quad \text{или} \quad X_C(\omega_0)}{R}$$

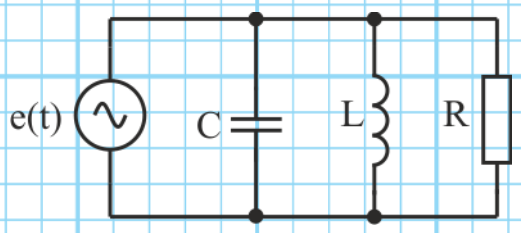
т.е. Q може да се определи като съотношението на реактивното и активното съпротивления при $\omega = \omega_0$.

В случай на висок качествен фактор ($Q > 10$), критичните честоти могат да бъдат определени достатъчно точно с:

$$\omega_{C1} = \omega_0 - \frac{BW}{2} \quad \text{и} \quad \omega_{C2} = \omega_0 + \frac{BW}{2}$$

<u>Резонанс на токовете</u>

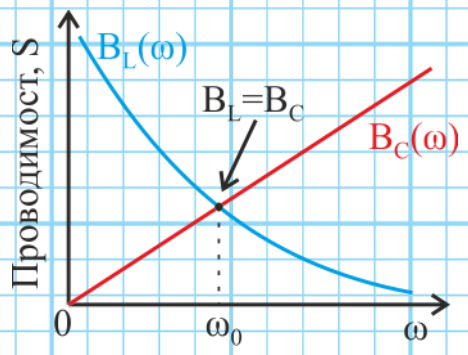
Сега ще разгледаме една паралелна RLC верига:



Комплексната проводимост на веригата е:

$$Y = \frac{1}{R} - j(B_L - B_C) = G - j(B_L - B_C)$$

където двете реактивни проводимости са функция на честотата: $B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}$ и $B_C(\omega) = \omega C$. Функционалната им зависимост от честотата ω е представена графично:



Ситуацията, при която $B_L(\omega) = B_C(\omega)$, се нарича резонанс на токовете, а честотата ω_0 – резонансна.

Вижда се, че условието за резонанс на токовете е:

$$B_L = B_C \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\omega L} = \omega C$$

т.е. резонансната честота се определя по същия начин, както и при последователна RLC верига:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

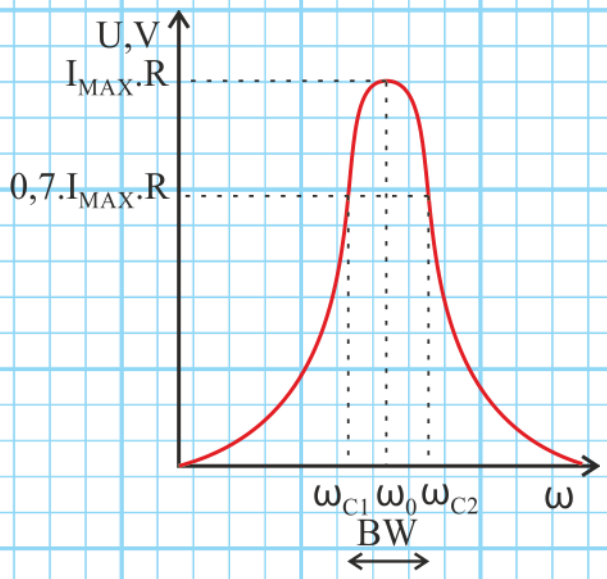
Аналогично на последователния RLC контур, можем да определим критичните честоти на паралелна RLC верига:

$$\omega_{C1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_{C2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

а широчината на честотната лента е:

$$BW = \omega_{C2} - \omega_{C1}$$



Качественият фактор на паралелна RLC верига е:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\omega_0}{\omega_{C2} - \omega_{C1}} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{X_L(\omega_0) \quad \text{или} \quad X_C(\omega_0)}$$

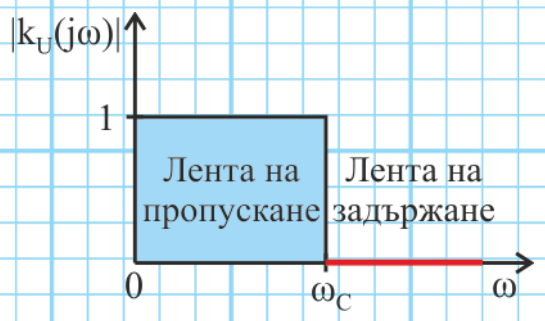
т.е. по-високо съпротивление на товара R води до увеличаване на Q.

Пасивни филтри

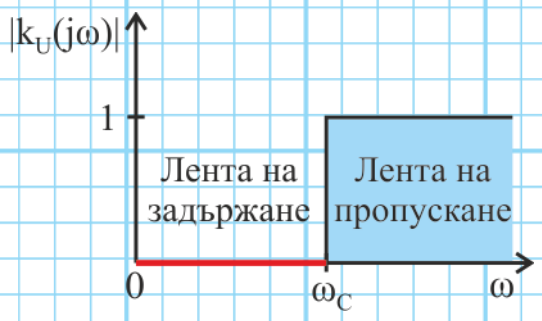
Електрическият филтър е верига, проектирана така че да пропуска сигнали с определени честоти и да изрязва или отслабва сигнали с други честоти. Филтрите се използват за ограничаване на честотния спектър на сигнал до честотна лента с определена широчина. Филтри се използват в радио и телевизионните приемници при избора на един сигнал (канал) от множество излъчвани такива. Обобщено филтърът може да се представи като четириполюсник, чиито входно и изходно напрежения са съответно $U_{\text{ВХ}}$ и $U_{\text{ИЗХ}}$.

В зависимост от това каква честотна лента се пропуска, могат да бъдат дефинирани четири вида филтри:

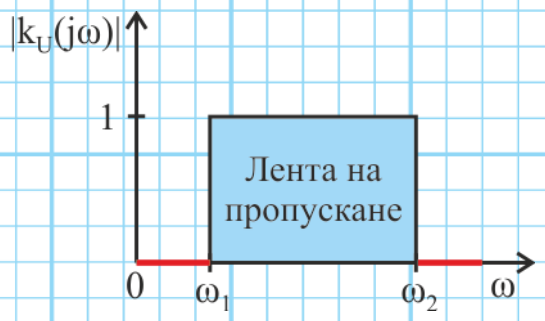
- **Нискочестотен филтър (НЧФ)** – пропуска честотите по-ниски от ω_C и задържа тези които са по-високи.



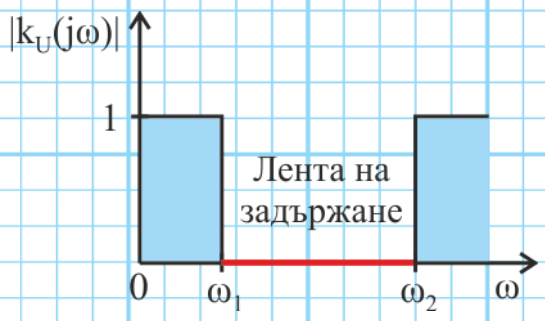
- **Високочестотен филтър (ВЧФ)** – пропуска честотите по-високи от ω_C и задържа тези които са по-ниски.



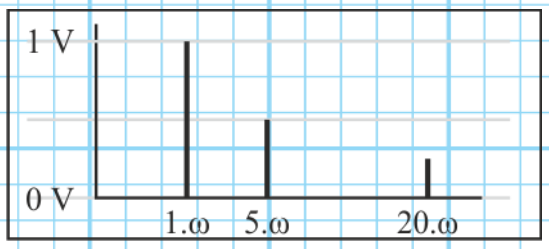
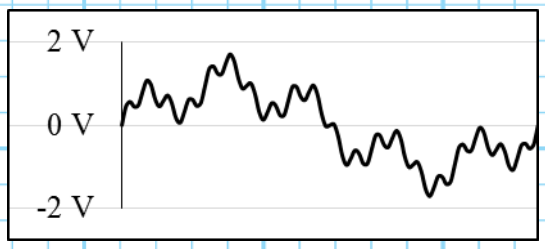
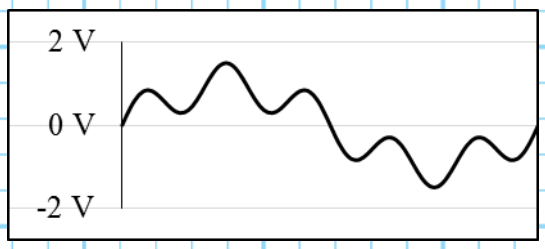
- **Лентово-пропускащ филтър (ЛПФ)** – пропуска само честотите, които са между ω_1 и ω_2, и задържа по-ниските и по-високите.

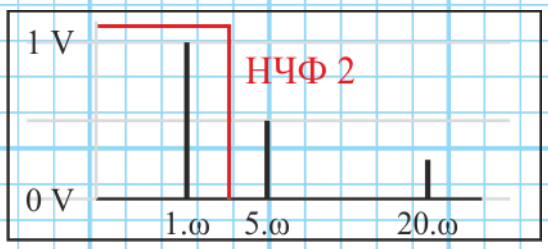
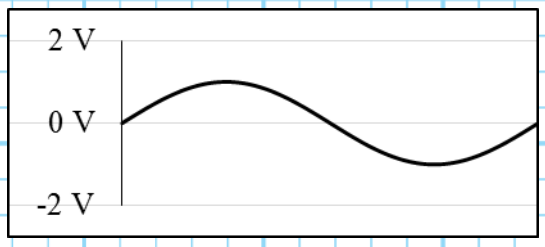
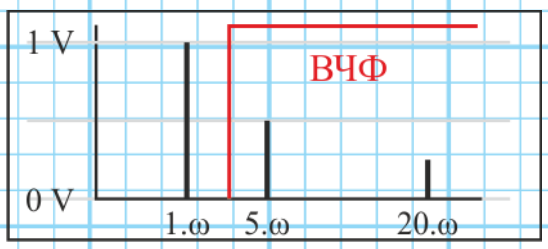
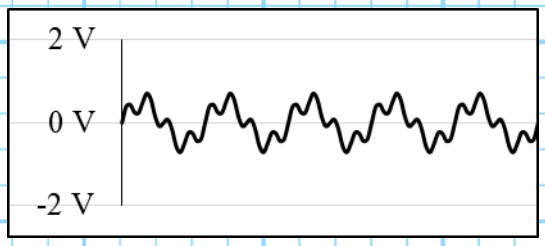
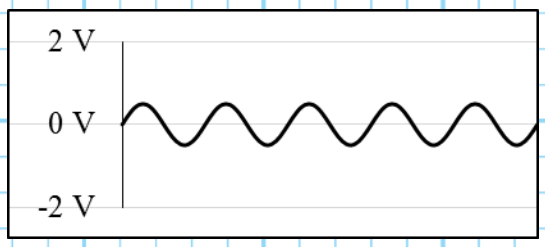
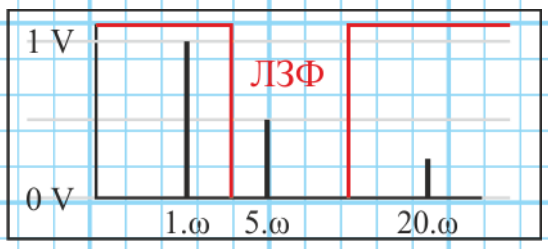
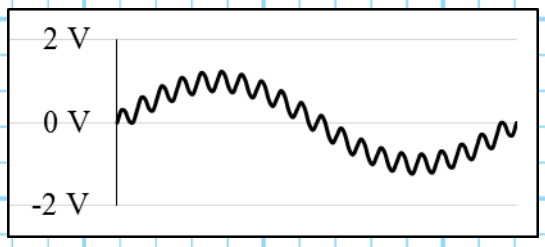


- **Лентово-задържащ филтър (ЛЗФ)** - задържа честотите, които са между ω_1 и ω_2, и пропуска по-ниските и по-високите.



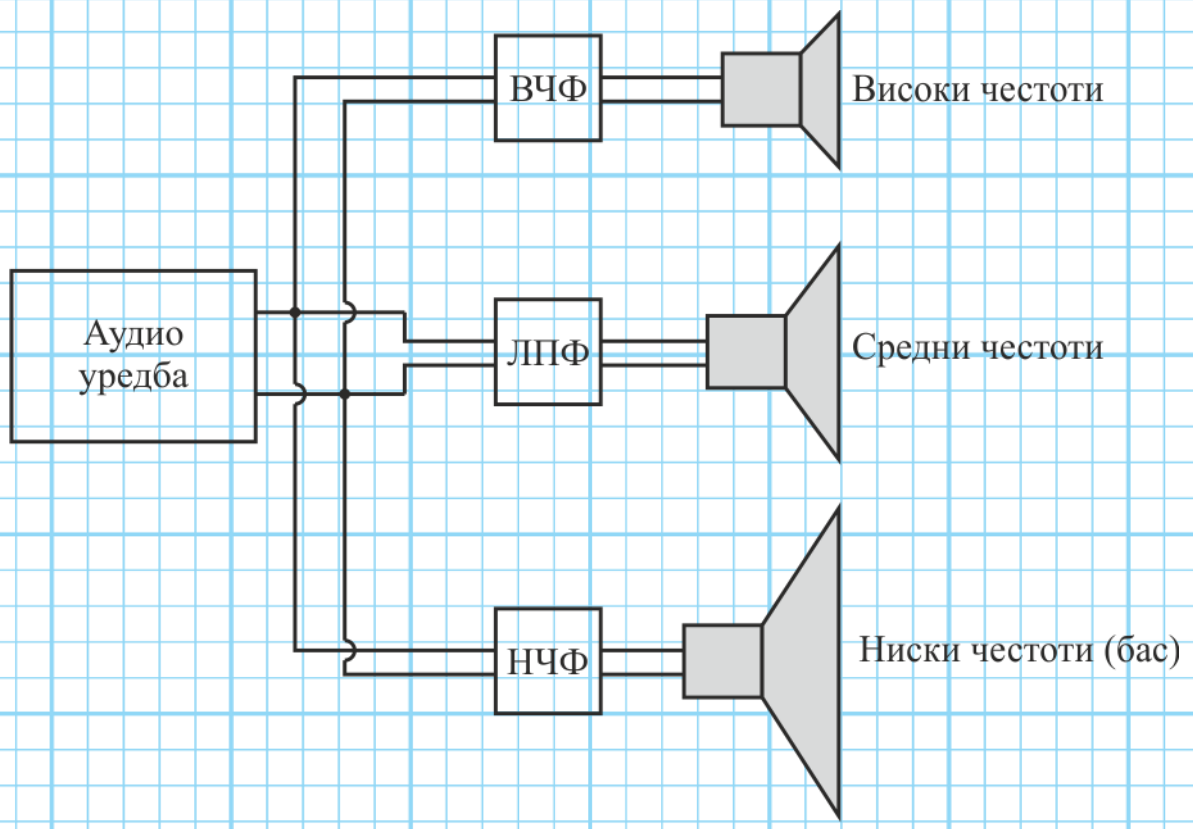
Примерно въздействие на филтри върху несинусоидални форми е представено в следващата таблица. Първия ред представя несинусоидален сигнал с 1, 5 и 20 хармоник (в честотната и във времевата област), а на следващите редове е представено влиянието на различните видове филтри върху този сигнал.

В честотната област	Във времевата област	
		Напре-жение с 1, 5 и 20 хармо-ник
		Минават само 1 и 5 хармо-ник

		Минава само първи хармо-ник
		Минават само 5 и 20 хармо-ник
		Минава само 5 хармо-ник
		Изрязва се 5 хармо-ник

По практичен пример за използване на филтри е една аудио уредба или аудио миксер. Спектърът на звуковия сигнал е от около 20 Hz като долна граница, до около 20 kHz за горна. Тъй като ниските честоти (басът), средните честоти и високите честоти се подават към различни тонколони, изходния сигнал на уредбата преминава съответно през нискочестотен, лентово-пропускащ и високочестотен филтър.

В случай на аудио-миксер, на различните честоти се осигурява различно усилване за постигане на оптимален ефект.

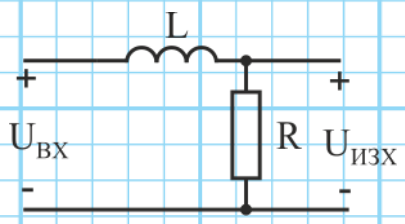


Нискочестотни филтри от първи ред

В този раздел от лекцията ще разгледаме начините за създаване на нискочестотен филтър.

Нискочестотен RL филтър

Нека да разгледаме следната верига:



Ако приемем, че изходът на филтъра не е натоварен, токовете през бобината и резистора са равни. Тогава уравненията по ВЗК за входния и изходния контур са:

$$\dot{U}_{\text{ВХ}} = \dot{I}(R + j\omega L)$$

$$\dot{U}_{\text{ИЗХ}} = \dot{I}R$$

Следователно предавателната функция по напрежение е:

$$k_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R}}$$

или:

$$|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

Можем да решим последното уравнение за $\omega = 0$ и $\omega = \infty$:

$$|k_U(0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (0)^2}} = 1 \quad |k_U(\infty)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\infty L}{R}\right)^2}} = \frac{R}{\infty} = 0$$

Критичната честота ω_C се дефинира като честотата, при която през филтъра преминава само половината от максималната мощност, което се случва при:

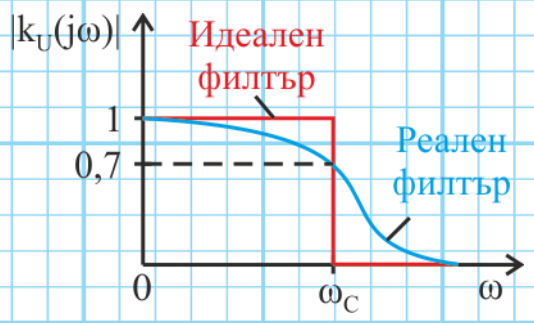
$$|k_U(j\omega)| = \frac{U_{\text{ИЗХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \sqrt{\frac{P_{\text{ИЗХ}}}{P_{\text{ВХ}}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_C L}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_C L}{R}\right)^2 = 2$$

Следователно критичната честота е:

$$\omega_C = \frac{R}{L}$$

В реалните филтри лентите на пропускане и задържане не са идеални и не са ясно изразени: (н фигурата числото 0,7 идва от $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$):

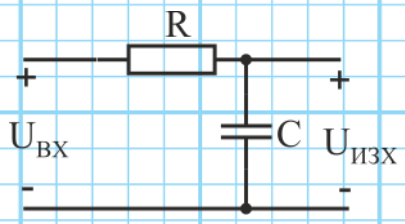


Ако заменим $\omega_C = \frac{R}{L}$ в уравнението на предавателната функция, получаваме:

$$k_U(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_C}}$$

<u>Нискочестотен RC филтър</u>

Друг начин да се реализира НЧФ е чрез RC верига:



Предавателната функция на филтъра е:

$$k_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

или

$$|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

Отново ще определим критичната честота ω_C при $|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_C RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad 1+(\omega_C RC)^2 = 2$$

За ω_C се получава:

$$\omega_C = \frac{1}{RC}$$

Като заместим ω_C, предавателната функция добива вида:

$$k_U(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_C}}$$

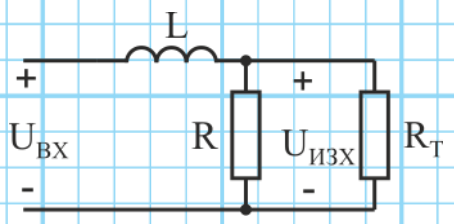
В: Но не е ли това е абсолютно същото уравнение, като при RL филтрите?

О: Точно така. Предавателната функция на НЧФ от първи ред е една и съща, независимо дали филтърът е реализиран чрез RL или RC верига:

$$\boxed{k_U(j\omega) = \frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_C}}}$$

Натоварен нискочестотни филтри

Нека да разгледаме **нискочестотен RL филтър**, който е натоварен с товар R_T:



R и R_T са свързани паралелно, така че ако заместим $R' = R||R_\mathrm{T}$, предавателната функция на RL филтъра става:

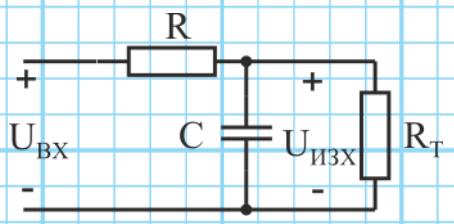
$$k_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_\mathrm{ИЗХ}}{\dot{U}_\mathrm{ВХ}} = \frac{R'}{R' + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega L}{R'}}$$

а критичната честота се определя с:

$$\omega_C = \frac{R'}{L}$$

Вижда се, че при $R' < R$ товарът води до допълнително затихване, а също така критичната честота се измества към по-ниска честота. Следователно за да се минимизира влиянието на товара, трябва да бъде изпълнено условието $R_\mathrm{T} \gg R$, тъй като тогава $R' \approx R$.

Сега ще разгледаме нискочестотен RC филтър, натоварен с товар R_T:



Тъй като C и R_T са свързани паралелно, предавателната функция на RC филтъра става:

$$k_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{\dfrac{\dfrac{1}{j\omega C}.R_{\text{T}}}{\dfrac{1}{j\omega C}+R_{\text{T}}}}{R+\dfrac{\dfrac{1}{j\omega C}.R_{\text{T}}}{\dfrac{1}{j\omega C}+R_{\text{T}}}} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}.R_{\text{T}}}{\dfrac{R}{j\omega C}+R.R_{\text{T}}+\dfrac{1}{j\omega C}R_{\text{T}}} =$$

$$= \frac{R_{\text{T}}}{(R+R_{\text{T}})+j\omega RR_{\text{T}}C}$$

В горната зависимост заместваме $R' = R||R_{\text{T}} = \frac{R.R_{\text{T}}}{R+R_{\text{T}}}$ и $\frac{R'}{R} = \frac{R_{\text{T}}}{R+R_{\text{T}}}$:

$$k_U(j\omega) = \frac{R_{\text{T}}}{(R+R_{\text{T}})+j\omega RR_{\text{T}}C} = \frac{R'/R}{1+j\omega R'C}$$

или

$$|k_U(j\omega)| = \frac{R'/R}{\sqrt{1+(\omega R'C)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega R'C)^2}}$$

където $K = R'/R$ е допълнителното затихване, дължащо се на товара.

Тъй като зависимостта е подобна на тази при ненатоварен филтър, като единствено R е заменено с R', критичната честота също се определя с:

$$\omega_C = \frac{1}{R'C}$$

Отново се вижда, че товарът води до допълнително затихване (K пъти), а също така критичната честота се измества към по-висока честота. Влиянието на товара е минимално, когато $R_\mathrm{T} \gg R$.

Пример: Пасивен RC НЧФ се състои от $R = 10\ k\Omega$ и $C = 2\ \mu F$. Да се определи как се изменя критичната му честота при натоварване с $R_\mathrm{T} = 20\ k\Omega$, както и затихването в следствие на товара.

Решение: Нека първо да определим критичната честота на филтъра при отворена верига:

$$\omega_C = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10^4 . 2 . 10^{-6}} = 50\ [rad/s]$$

Следователно предавателната функция е:

$$k_U(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{50}}$$

Сега ще определим критичната честота при натоварване с $R_\mathrm{T} = 20\ k\Omega$:

$$\omega_C = \frac{1}{R'C} = \frac{1}{\dfrac{10^4 . 2.10^4}{10^4 + 2.10^4} . 2 . 10^{-6}} = \frac{300}{4} = 75\ [rad/s]$$

За предавателната функция на натоварения филтър се получава:

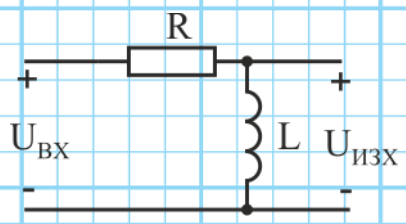
$$k_U(j\omega) = \frac{\dfrac{R'}{R}}{1 + j\omega R'C} = \frac{\dfrac{\dfrac{2.10^4}{3}}{10^4}}{1 + j\omega \dfrac{2.10^4}{3} 2 . 10^{-6}} = \frac{0{,}667}{1 + j\dfrac{\omega}{75}}$$

От предавателната функция се вижда, че товарът добавя затихване от 0,667 пъти, и измества критичната честота от 50 $[rad/s]$ към 75 $[rad/s]$.

Високочестотни филтри от първи ред

Високочестотен RL филтър

Нека да разгледаме следната верига:



Ако приемем, че изходът на веригата не е натоварен, токът през резистора и бобината е един и същ. Тогава можем да запишем две уравнения по ВЗК за входа и изхода на веригата:

$$\dot{U}_{\text{ВХ}} = \dot{I}(R + j\omega L)$$

$$\dot{U}_{\text{ИЗХ}} = j\omega L\dot{I}$$

Следователно предавателната функция на филтъра е:

$$k_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - j\dfrac{R}{\omega L}}$$

а нейният модул е:

$$|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

Можем да анализираме горната зависимост за две честоти: $\omega = 0$ и $\omega = \infty$:

$$|k_U(0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{0}\right)^2}} = 0$$

$$|k_U(\infty)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\infty L}\right)^2}} = 1$$

Вижда се, че схемата представлява високочестотен филтър.

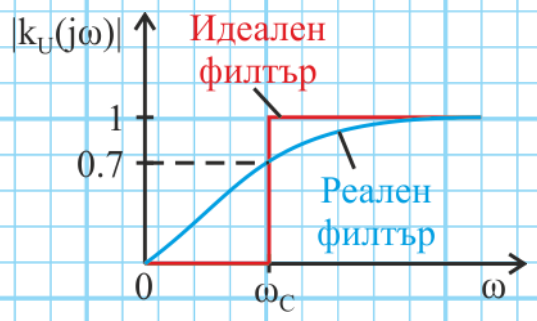
Можем да определим критичната честота при $|K_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad 1 + \left(\frac{R}{\omega_C L}\right)^2 = 2$$

От там за ω_C на ВЧФ получаваме същата зависимост, както и при НЧФ:

$$\omega_C = \frac{R}{L}$$

Графичната интерпретация на предавателната функция на реален ВЧФ е:



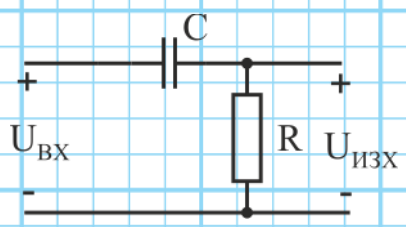
Подобно на НЧФ, и тук кривата на реалния филтър се различава значително от тази на идеалния филтър.

Ако заменим $\omega_C = \frac{R}{L}$ в $k_U(j\omega) = \frac{1}{1-j\frac{R}{\omega L}}$, получаваме:

$$k_U(j\omega) = \frac{1}{1 - j\dfrac{R}{\omega L}} = \frac{1}{1 - j\dfrac{\omega_C}{\omega}}$$

<u>Високочестотен RC филтър</u>

Нека да разгледаме следната схема:



Аналогично на RL филтъра, можем да определим предавателната функция за RC схемата:

$$k_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{j\omega RC}}$$

а за модула се получава:

$$|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

Определяме критичната честота при $|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad 1+\left(\frac{1}{\omega_C RC}\right)^2=2$$

или с други думи, получаваме същата зависимост като при нискочестотен RC филтър:

$$\omega_C=\frac{1}{RC}$$

Като положим $\omega_C=\frac{1}{RC}$ в предавателната функция, тя добива следния вид:

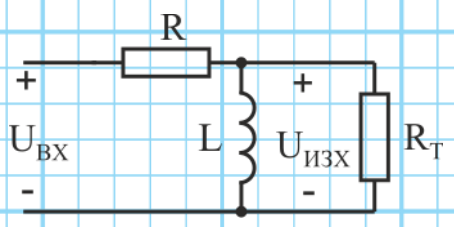
$$k_U(j\omega)=\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega RC}}=\frac{1}{1-j\frac{\omega_C}{\omega}}$$

Или можем да обобщим, че предавателната функция на ВЧФ, независимо дали е реализиран с RL или RC сехма, е:

$$\boxed{k_U(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega_C}{\omega}}}$$

<u>Натоварен високочестотен филтър</u>

Нека високочестотен RL филтър е натоварен с товар R_T:



Тъй като L и R_{T} са свързани паралелно, предавателната функция добива следния вид:

$$k_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{\dfrac{j\omega L R_{\mathrm{T}}}{j\omega L + R_{\mathrm{T}}}}{R + \dfrac{j\omega L R_{\mathrm{T}}}{j\omega L + R_{\mathrm{T}}}} = \frac{j\omega L R_{\mathrm{T}}}{j\omega L R + R_{\mathrm{T}} R + j\omega L R_{\mathrm{T}}} =$$

$$= \frac{R_{\mathrm{T}}}{(R + R_{\mathrm{T}}) + \dfrac{R_{\mathrm{T}} R}{j\omega L}}$$

Ако заместим $R' = R||R_L = \frac{R.R_L}{R+R_L}$ и $\frac{R'}{R} = \frac{R_L}{R+R_L}$, горното уравнение става:

$$k_U(j\omega) = \frac{R_{\mathrm{T}}}{(R + R_{\mathrm{T}}) + \dfrac{R_{\mathrm{T}} R}{j\omega L}} = \frac{\dfrac{R'}{R}}{1 + \dfrac{R'}{j\omega L}} = \frac{K}{1 + \dfrac{R'}{j\omega L}}$$

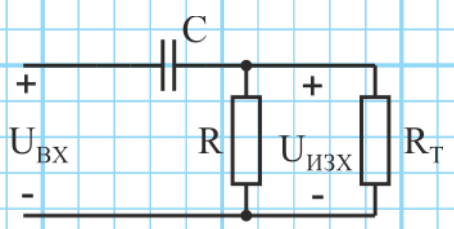
където $K = \frac{R'}{R}$ е затихването, дължащо се на товара R_{T}.

Следователно критичната честота може да се определи, като заменим R с R':

$$\omega_C = \frac{R'}{L}$$

В случай, че $R' < R$, затихването на филтъра се увеличава, а критичната честота ω_C става по-ниска.

Сега ще разгледаме натоварен високочестотен RC филтър:



Тъй като R и R_{T} са свързани паралелно, предавателната функция на филтъра е:

$$k_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{R||R_L}{R||R_L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R' C}}$$

където $R' = R||R_L$. Следователно критичната честота е:

$$\omega_C = \frac{1}{R'C}$$

От получената зависимост се вижда, че товарът увеличава затихването на филтъра, а също така води до изместване на ω_C към по-високи честоти.

В: Доколкото разбирам RL и RC филтрите функционират абсолютно еднакво. Тогава каква е разликата между тях? Кога трябва да използваме едните и кога – другите?

О: RC и RL филтрите функционират идентично, но в повечето случаи се ползват RC филтри по една много проста причина: бобините заемат сравнително голямо пространство, докато кондензаторите могат да бъдат лесно миниатюризирани и интегрирани, дори като части от интегрални схеми.

Пример: Усилвател усилва сигнал с честота $1\ [kHz]$ и захранва товар $R_{\mathrm{T}} = 50\ [k\Omega]$, но усилвателят също така добавя нискочестотни смущения с честота $50\ [Hz]$. Да се проектира филтър, който пропуска основния сигнал ($1\ [kHz]$) и намалява $50\ [Hz]$-ия шум 10 пъти. Да се определи затихването на основния сигнал в следствие на филтъра.

Решение: Тъй като трябва да пропуснем сигнал с честота $1\ [kHz]$ и да спрем стигнал с честота $50\ [Hz]$, ни е нужен ВЧФ. Ще използваме RC филтър.

За да минимизираме влиянието на товара ($50\ [k\Omega]$) върху параметрите на филтъра, той трябва да е много по-голям от съпротивлението на резистора:

$$R_L = 50\ k\Omega \gg R$$

Нека да изберем резистор $R = 1\ [k\Omega]$. Предавателната функция на ВЧФ е:

$$|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_C}{\omega}\right)^2}}$$

Тъй като филтъра трябва да намали 50 херцовия шум 10 пъти, можем да запишем:

$$|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_C}{\omega_{50}}\right)^2}} = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad 1 + \left(\frac{\omega_C}{\omega_{50}}\right)^2 = 100$$

където ω_{50} е ъгловата честота при $f = 50\ [Hz]$.

От там за критичната честота ω_C получаваме:

$$\omega_C = \sqrt{99}.\omega_{50} = \sqrt{99}.(2\pi.50) = 3125\ [rad/s]$$

Следователно ни е нужен кондензатор с капацитет:

$$\omega_C = \frac{1}{RC} \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{R\omega_C} = \frac{1}{1000.3125} = 32\ [nF]$$

За да определим затихването на филтъра, за сигнала с честота 1 $[kHz]$, ще определим големината на предавателната функция при честота $\omega_{1k} = 2\pi 1000$:

$$|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_C}{\omega_{1k}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3125}{2.\pi.1000}\right)^2}} = 0{,}90 = \frac{1}{1{,}1}$$

Следователно нашият филтър ще намали амплитудата на 50 херцовия шум 10 пъти, но също така ще намали амплитудата на основния сигнал (1 $[kHz]$) – 1,1 пъти.

Лентово-пропускащи филтри от втори ред

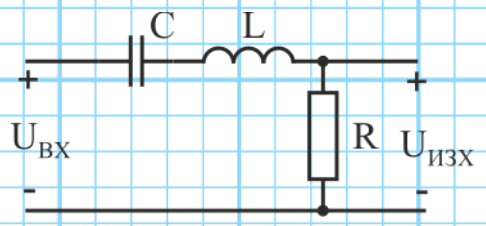
В началото на лекцията вече разгледахме как изглежда предавателната функция на идеален ЛПФ, като той пропуска честотите в диапазона от ω_{C1} до ω_{C2} и задържа по-малките и по-големите честоти. Но границата между пропускане и задържане на един реален ЛПФ изглежда по-скоро така:

Според качественият си фактор, могат да бъдат разграничени два основни типа лентово-пропускащи филтри:

- Теснолентови ($Q > 10$);
- Широколентови ($Q < 0{,}35$).

Теснолентови лентово-пропускащи филтри

Теснолентовите ЛПФ са базирани на резонансни явления, като могат да бъдат реализирани както с последователна RLC верига, така и с паралелна. Нека да разгледаме следната схема:



При ненатоварен филтър токът през L, C и R е един и същ, т.е. предавателната функция на филтъра е:

$$k_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ИЗХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{\dot{I}R}{\dot{I}\left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)}$$

или

$$|k_U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)^2}}$$

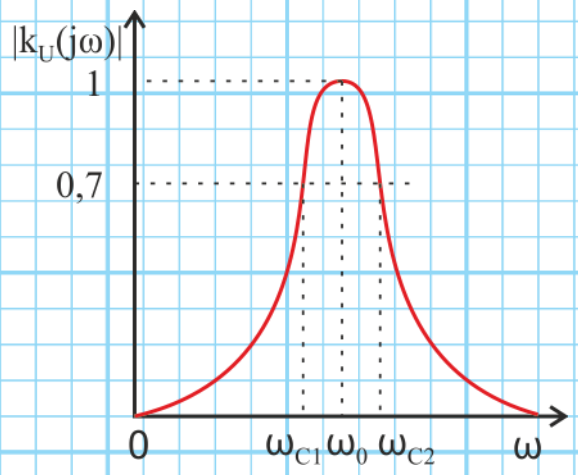
Нека да решим $|k_U(j\omega)|$ за честотите $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ и $\omega = \infty$:

$$|k_U(0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (0 - \infty)^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$|k_U(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}(0)^2}} = 1$$

$$|k_U(\infty)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\infty - \frac{1}{\infty}\right)^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

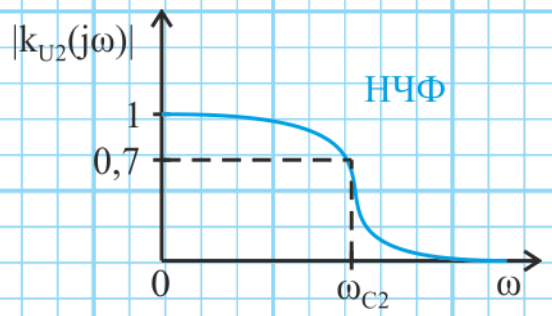
Вижда се, че предавателната функция има максимум ($|k_U(\omega_0)| = 1$) при $\omega = \omega_0$, докато при ниски и високи честоти $|k_U(\omega_0)| = 0$:



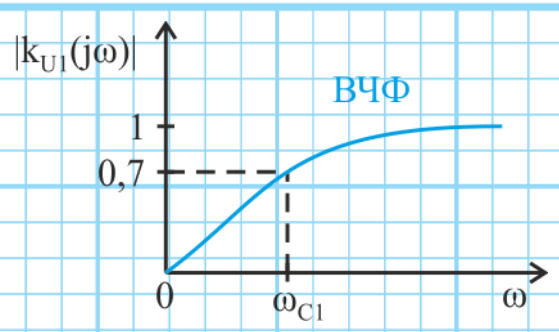
В разделът „Резонансни явления“, вече определихме големините на критичните честоти ω_{C1} и ω_{C2}.

<u>Широколентови лентово-пропускащи филтри</u>

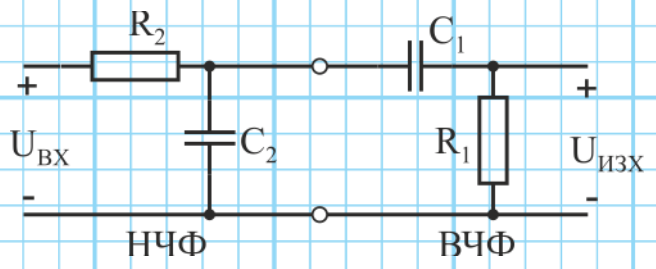
Друг начин за конструиране на ЛПФ е чрез комбинация от НЧФ и ВЧФ. Нека е даден НЧФ с критична честота ω_{C1}, чиято предавателна функция k_{U2} е:

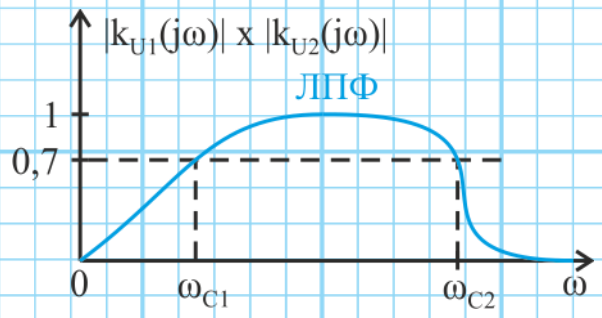


Също така е даден ВЧФ с критична честота $\omega_{C1} \ll \omega_{C2}$, чиято предавателна функция k_{U1} е:



Ако свържем двата филтъра каскадно, резултатният филтър ще пропуска честотите между ω_{C1} и ω_{C2} и ще задържа останалите.





За да може ВЧФ да не влияе върху свойствата на НЧФ, трябва да е изпълнено следното условие: $R_1 \gg R_2$. При тази ситуация можем да използваме ненатоварените предавателни функции за да определим $k_U(j\omega)$ на ЛПФ:

$$k_U(j\omega) = k_{U1}(j\omega) \times k_{U2}(j\omega) = \frac{1}{1 - j\dfrac{\omega_{C1}}{\omega}} \times \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{C2}}} =$$

$$= \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{C2}} - j\dfrac{\omega_{C1}}{\omega} + \dfrac{\omega_{C1}}{\omega_{C2}}}$$

където $\omega_{C1} = \frac{1}{R_1 C_1}$ и $\omega_{C2} = \frac{1}{R_2 C_2}$.

Важно е да се отбележи, че по този начин не може да се създаде тесполентов филтър (тесполентовите са базирани на резонансни явления), така че трябва да приемем че $\omega_{C1} \ll \omega_{C2}$ (т.е. $10.\omega_{C1} \leq \omega_{C2}$). При тази ситуация можем да

пренебрегнем $\frac{\omega_{C1}}{\omega_{C2}} \approx 0$, при което последното уравнение става:

$$k_U(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{C2}} - j\frac{\omega_{C1}}{\omega} + \frac{\omega_{C1}}{\omega_{C2}}} \approx \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_{C2}} - \frac{\omega_{C1}}{\omega}\right)}$$

Подобно на резонансните филтри, и тук можем да определим честота ω_0, която в случая се нарича **средна честота**:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{C1}.\omega_{C2}}$$

Честотната лента и качественият фактор са съответно:

$$BW = \omega_{C2} - \omega_{C1}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{BW}$$

Като се има предвид, че $10.\omega_{C1} \leq \omega_{C2}$, можем да определим граничната стойност за Q на широколентов ЛПФ:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\sqrt{\omega_{C1}.\omega_{C2}}}{\omega_{C2} - \omega_{C1}} = \frac{\sqrt{\omega_{C1}.10.\omega_{C1}}}{10.\omega_{C1} - \omega_{C1}} \leq 0{,}35$$

Пример: Да се проектира ЛПФ с честотна лента от $100\ [kHz]$ до $1\ [MHz]$.

Решение: Първо ще изберем резистор за нискочестотния филтър: $R_2 = 100\ [\Omega]$. НЧФ ограничава честотите отгоре, така че неговата критична честота е $f_{C2} = 1\ [MHz]$. Тогава можем да определим капацитетът на кондензатора:

$$\omega_{C2} = 2\pi f_{C2} = \frac{1}{R_2 C_2}$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{1}{R_2 2\pi f_{C2}} = \frac{1}{100.2\pi 10^6} = 1{,}6\ [nF]$$

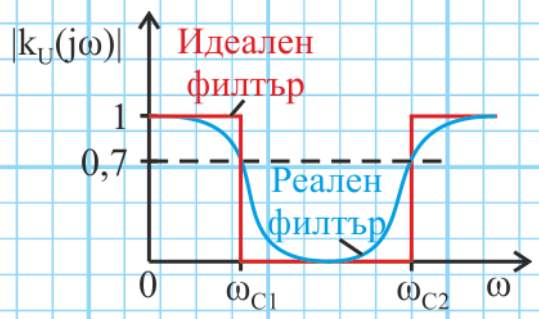
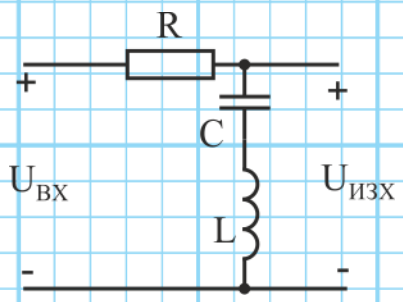
След това трябва да проектираме високочестотния филтър. За да има добра връзка между двата филтъра, т.е. ВЧФ да не влияе на НЧФ, е нужно да е изпълнено $R_1 \gg R_2$, така че избираме съпротивление $R_1 = 100\ [k\Omega]$. Определяме капацитета на кондензатора при $f_{C1} = 100\ kHz$:

$$\omega_{C1} = 2.\pi.f_{C1} = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{1}{R_1 2\pi f_{C1}} = \frac{1}{100.10^3.2\pi 100.10^3} = 16\ [pF]$$

Лентово задържащи филтри от втори ред

Предавателната функция на реален лентово-задържащ филтър $|k_U(j\omega)|$ има следния вид:



Пасивните ЛЗФ обикновено се реализират на базата на последователен или паралелен резонанс. Примерен ЛЗФ, базиран на последователна RLC верига, е представен отдолу: